Pavel Obdržálek, MAII, úkol č. 8

$$\text{Pořádně dokažte, že průnik konečně mnoha otevřených množin v } \mathbb{R}^m \text{ je otevřená množina.} \tag{1}$$

Zapišme si zadání matematickým jazykem:
Nechť množiny G_i, $i = 1, \dots, n$ jsou otevřené v $\mathbb{R}^m$.
Pak $\bigcap_{i=1}^n G_i$ je otevřená množina v $\mathbb{R}^m$.
Potom dokažme, že platí

$$\forall x \in \bigcap_{i=1}^n G_i \exists a \in \mathbb{R}, a > 0 : B(x, a) \subset \bigcap_{i=1}^n G_i$$

kde $B(x, a)$ je okolí bodu x (tzv. otevřená koule o poloměru a se středem v x)
Pro každou množinu G_i dokážeme najít takové a_i tak, aby platilo

$$\forall x \in \ G_i \exists a_i \in \mathbb{R}, a_i > 0 : B(x, a_i) \subset G_i$$

Nyní stačí najít takové a, pro které platí, že $a = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ a předpoklad platí.

$$\text{Určete definiční obor, rozhodněte o jeho otevřenosti a uzavřenosti. Dále vyšetřete spojitost a globální extrémy funkce } f(x, y) = \sqrt{\log(x - y)}. \tag{2}$$

Definiční obor:

Argument logaritmu musí být kladný: $x - y > 0$, tedy $x > y$.

Výraz pod odmocninou musí být nezáporný: $\log(x - y) \geq 0$.

Derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{(x - y)\sqrt{\log(x - y)}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{1}{(x - y)\sqrt{\log(x - y)}}$$

Extrémy (derivace = 0):

Derivace se nikdy nerovná 0

$$\text{Určete definiční obor, rozhodněte o jeho otevřenosti a uzavřenosti. Dále vyšetřete spojitost a globální extrémy funkce } g(x, y) = \frac{x}{y}. \tag{3}$$

Definiční obor:

$x \in \mathbb{R}$

Jmenovatel nesmí být 0: $y \neq 0$

Derivace:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

Extrémy (derivace = 0):

Derivace = 0: $x = 0$